

Copris による制約プログラミング入門

田村直之

2021-01-04

目次

1	はじめに	3
2	インストール	3
3	初めての利用	3
3.1	REPL からの利用	3
3.1.1	CSP の定義	3
3.1.2	解の探索	4
3.2	スクリプトファイルの作成	5
3.2.1	練習問題	6
4	簡単な例題	6
4.1	コインの問題	6
4.1.1	練習問題	7
4.2	部分和问题	7
4.2.1	練習問題	8
4.3	魔方陣	8
4.3.1	練習問題	8
4.4	グラフ彩色問題	9
4.4.1	練習問題	10
4.5	数独	10
4.5.1	練習問題	10
4.6	ビンパッキング問題	11
4.6.1	練習問題	11
4.7	ナップサック問題	11
4.7.1	練習問題	12
4.8	4クイーン問題	12
5	クラスとメソッドの簡単なまとめ	14
5.1	整数変数オブジェクト (Var オブジェクト)	14
5.2	項オブジェクト (Term オブジェクト)	15
5.3	制約オブジェクト (Constraint オブジェクト)	15
5.4	CSP オブジェクト	16
5.4.1	整数変数の宣言	16
5.4.2	制約の追加	16
5.5	解の探索	17
5.6	その他	18
5.6.1	SAT ソルバーの切り換え	18
5.6.2	PB ソルバーの利用	18
5.6.3	SMT ソルバーの利用	18
5.6.4	JSR-331 ソルバーの利用	18
5.6.5	XCSP ファイルのインポート	18

5.6.6	Sugar CSP ファイルのエクスポート・インポート	19
5.6.7	複数の CSP+Solver の利用	19
5.6.8	Copris DSL を用いない	19

1 はじめに

この文書では、[Scala](#) 言語に埋めこまれた制約プログラミング用 DSL (Domain Specific Language) である [Copris](#) を使い、制約プログラミングの入門的な内容を説明する。

2 インストール

1. [Java](#) runtime version 1.8 以降をインストールする
2. [Scala](#) version 2.12 をインストールする
3. Scala のバージョンをチェックする


```

      |           $ scala -version
      |           Scala code runner version 2.12.5 -- Copyright 2002-2018, LAMP/EPFL and Lightbend, Inc.
      
```

Copris は Scala version 2.12 で動作する (他のバージョンでは動作しない).
4. [Copris リポジトリ](#) を clone

3 初めての利用

3.1 REPL からの利用

ここでは、以下の例題を考える。

1 円硬貨, 5 円硬貨, 10 円硬貨を合計で 15 枚, それぞれを 1 枚以上持っている. 金額の合計は 90 円である. それぞれの硬貨を何枚持っているか?

この問題は、以下の CSP (制約充足問題) として定式化できる。

$$\begin{aligned}
 x &\in \{1..15\} \\
 y &\in \{1..15\} \\
 z &\in \{1..15\} \\
 x + y + z &= 15 \\
 x + 5y + 10z &= 90
 \end{aligned}$$

これを Copris を用いて解くことにする. Copris パッケージの build フォルダに移動し、以下のように入力して Copris を起動する。

```
| $ scala -cp copris-all_2.12_2.3.2.jar
```

3.1.1 CSP の定義

scala の入力プロンプトが表示されたら、以下のように入力する。

```

| scala> import jp.kobe_u.copris._
| scala> import jp.kobe_u.copris.dsl._
| scala> int('x, 1, 15)
| scala> int('y, 1, 15)
| scala> int('z, 1, 15)
| scala> add('x + 'y + 'z === 15)
| scala> add('x + 'y * 5 + 'z * 10 === 90)

```

- 1 行目は Copris 用クラス名の import 宣言である。
- 2 行目は Copris DSL 用のメソッドの import 宣言である。
- 3 行目は変数 x を宣言している (下限 1, 上限 15). シングルクォーテーションから始まる記述 'x は Scala に

おける Symbol オブジェクトの記法であるが, Copris DSL により Copris の整数変数 (Var オブジェクト) に暗黙変換される.

- 4 行目と 5 行目は同様に変数 y, z を宣言している.
- 6 行目は制約 $x + y + z = 15$ を追加している. 制約中での等号に `===` を用いる点に注意する. `add` は制約を CSP オブジェクトに追加するためのメソッドである.
- 7 行目は制約 $x + 5y + 10z = 90$ を追加している. `5 * 'y` のようには記述できない点に注意する. 整数定数を前に記述したい場合は `Num(5) * 'y` のように書く.

定義した CSP オブジェクトは, 変数 `csp` として参照できる.

```
| scala> csp
| res: CSP = CSP(Vector(x, y, z),Vector(),Map(...),Vector(...))
```

CSP オブジェクトは, 整数変数の列 `variables`, ブール変数の列 `bools`, 変数ドメインのマップ `dom`, 制約の列 `constraints` から成る.

```
| scala> csp.variables
| res: IndexedSeq[Var] = Vector(x, y, z)
|
| scala> csp.bools
| res: IndexedSeq[Bool] = Vector()
|
| scala> csp.dom
| res: Map[Var,Domain] = Map(x -> Domain(1,15), y -> Domain(1,15), z -> Domain(1,15))
|
| scala> csp.constraints
| res: IndexedSeq[Constraint] = Vector(Eq(Add(Add(x,y),z),15), Eq(Add(Add(x,Mul(y,5)),Mul(z,10)),90))
```

`show` メソッドでも表示できる.

```
| scala> show
| int(x,1,15)
| int(y,1,15)
| int(z,1,15)
| Eq(Add(Add(x,y),z),15)
| Eq(Add(Add(x,Mul(y,5)),Mul(z,10)),90)
```

- ここで `Add` は加算, `Mul` は乗算, `Eq` は等号を表す.

CSP オブジェクトは, 変数や制約の追加を行える `mutable` なオブジェクトとして実装されている.

3.1.2 解の探索

最初の解の探索は `find` で行う.

```
| scala> find
| res: Boolean = true
```

結果の `true` は, 解が存在することを表す. CSP の解は, `solution` 変数に代入されている.

```
| scala> solution
| res: Solution = Solution(Map(x -> 5, y -> 3, z -> 7),Map())
```

`Solution` オブジェクトは, 整数変数 (Var オブジェクト) に対する値割当てを表すマップとブール変数 (Bool オブジェクト) に対する値割当てを表すマップから構成される.

```
| scala> solution.intValues
| res: Map[Var,Int] = Map(x -> 5, y -> 3, z -> 7)
|
| scala> solution.boolValues
| res: Map[Bool,Boolean] = Map()
```

解における各変数の値は `solution` メソッドで得ることができる。

```
| scala> solution('x)
| res: Int = 5
|
| scala> solution('y)
| res: Int = 3
|
| scala> solution('z)
| res: Int = 7
```

次の解の探索は `findNext` で行う。

```
| scala> findNext
| res: Boolean = false
```

結果の `false` は、解が存在しないことを表す。この場合、変数 `solution` は `null` になっている。

```
| scala> solution
| res: Solution = null
```

`show` メソッドを実行すると、確かに条件が追加されていることが分かる。

```
| scala> show
| int(x,1,15)
| int(y,1,15)
| int(z,1,15)
| Eq(Add(Add(x,y),z),15)
| Eq(Add(Add(x,Mul(y,5)),Mul(z,10)),90)
| Not(And(And(Eq(x,5),Eq(y,3),Eq(z,7)),And()))
```

追加された条件を取り消すには `cancel` を実行する。

```
| scala> cancel
| scala> show
| int(x,1,15)
| int(y,1,15)
| int(z,1,15)
| Eq(Add(Add(x,y),z),15)
| Eq(Add(Add(x,Mul(y,5)),Mul(z,10)),90)
```

解の一覧は `solutions` で求めることができる。

```
| scala> solutions.foreach(println)
| Solution(Map(x -> 5, y -> 3, z -> 7),Map())
```

一度 `findNext` を実行した後で、全解を求めたい場合、上記のように `cancel` で追加条件を削除する必要がある。

3.2 スクリプトファイルの作成

CSP を Scala のスクリプトファイルとして定義することもできる。

以下がスクリプトファイルである ([Example-csp.scala](#))。

```
| 1: import jp.kobe_u.copris._
| 2: import jp.kobe_u.copris.dsl._
| 3:
| 4: int('x, 1, 15)
| 5: int('y, 1, 15)
| 6: int('z, 1, 15)
| 7: add('x + 'y + 'z === 15)
| 8: add('x + 'y * 5 + 'z * 10 === 90)
```

スクリプトファイルは以下のように `:load` コマンドを使用して読み込む。

```
| scala> :load Example-csp.scala
```

```
| Loading Example-csp.scala...
| .....
| scala> find
| res: Boolean = true
| scala> solution
| res: Solution = Solution(Map(x -> 5, y -> 3, z -> 7),Map())
```

スクリプトファイルの内容を変更した後、再度読み込みたい場合には、`:load` の前に `init` を実行し、いったん CSP の定義を消去する必要がある。

```
| scala> init
| scala> :load Example-csp.scala
```

以下で示すスクリプトファイルでは、先頭に `init` を記述し、何度でも読み込めるようにしておく。

3.2.1 練習問題

1. 合計が 105 円の場合を試してみよ。

4 簡単な例題

4.1 コインの問題

最初の問題は、コインによる支払いの問題である。

以下のユーロ硬貨を持っているとする (総和は 148 セントになる)。

- 20 セント硬貨 4 枚
- 10 セント硬貨 4 枚
- 5 セント硬貨 4 枚
- 2 セント硬貨 4 枚

合計がちょうど 93 セントになる組合せはあるだろうか?

この問題は、以下の CSP (制約充足問題) として定式化できる。変数 x_i は i セント硬貨の枚数を表している。

$$\begin{aligned} x_{20} &\in \{0..4\} \\ x_{10} &\in \{0..4\} \\ x_5 &\in \{0..4\} \\ x_2 &\in \{0..4\} \\ 20x_{20} + 10x_{10} + 5x_5 + 2x_2 &= 93 \end{aligned}$$

CSP を記述したファイルは以下のようになる (`Coin-csp.scala`)。

```
| 1: import jp.kobe_u.copris._
| 2: import jp.kobe_u.copris.dsl._
| 3:
| 4: init
| 5: int('x(20), 0, 4)
| 6: int('x(10), 0, 4)
| 7: int('x(5), 0, 4)
| 8: int('x(2), 0, 4)
| 9: add('x(20) * 20 + 'x(10) * 10 + 'x(5) * 5 + 'x(2) * 2 === 93)
```

Copris では `'x(20)` のように、添字を用いることができる。添字には整数だけでなく、文字列など Scala の任意のオブジェクトを用いて良い。また `'x(1, "a")` などのように複数の添字を用いることもできる。

4.1.1 練習問題

1. 上のコインの問題の解は何通り存在するか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い.

```
scala> cancel
scala> solutions.size
scala> cancel
scala> solutions.foreach(println)
```

2. 硬貨が各 3 枚の場合はどうなるか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い.

```
scala> :load Coin-csp.scala
scala> add('x(20) <= 3)
scala> add('x(10) <= 3)
scala> add('x(5) <= 3)
scala> add('x(2) <= 3)
scala> find
```

4.2 部分和问题

集合 $\{2, 3, 5, 8, 13, 21, 34\}$ の部分集合で、和が 50 になるものはあるか?

この問題は **部分和问题** (Subset sum problem) として知られている問題の例である。部分和问题は NP-完全である ([Wikipedia:部分和问题](#))。

これは、以下の CSP (制約充足問題) として定式化できる。

$$\begin{aligned} x_2 &\in \{0, 1\} \\ x_3 &\in \{0, 1\} \\ x_5 &\in \{0, 1\} \\ x_8 &\in \{0, 1\} \\ x_{13} &\in \{0, 1\} \\ x_{21} &\in \{0, 1\} \\ x_{34} &\in \{0, 1\} \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 + 8x_8 + 13x_{13} + 21x_{21} + 34x_{34} &= 50 \end{aligned}$$

CSP を記述したファイルは以下のようなになる ([SubsetSum-csp.scala](#))。

```
1: import jp.kobe_u.copris._
2: import jp.kobe_u.copris.dsl._
3:
4: def define(sum: Int) {
5:   init
6:   boolInt('x(2))
7:   boolInt('x(3))
8:   boolInt('x(5))
9:   boolInt('x(8))
10:  boolInt('x(13))
11:  boolInt('x(21))
12:  boolInt('x(34))
13:  add('x(2)*2 + 'x(3)*3 + 'x(5)*5 + 'x(8)*8 + 'x(13)*13 + 'x(21)*21 + 'x(34)*34 === sum)
14: }
```

boolInt は 0-1 変数の宣言であり、boolInt(x) は int(x, 0, 1) と同一である。

また上記プログラムでは、直接 CSP を記述するのではなく、関数 define(sum: Int) で和を与えられるようにし

ている。この場合、利用方法は以下のようになる。

```
| scala> :load SubsetSum-csp.scala
| scala> define(50)
| scala> find
```

4.2.1 練習問題

- 和が 40 の場合はどうなるか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い。

```
|         scala> define(40)
|         scala> find
```

4.3 魔方陣

1 から 9 の数字を 3×3 に配置し、各行、各列、各対角線の和がいずれも 15 になるようにせよ。

このような配置は 魔方陣 (Magic square) と呼ばれる ([Wikipedia:魔方陣](#))。

以下のように CSP として定式化できる。

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &\in \{1..9\} & (i = 0..2, j = 0..2) \\
 \text{Alldifferent}(x_{00}, x_{01}, \dots, x_{22}) \\
 x_{i0} + x_{i1} + x_{i2} &= 15 & (i = 0..2) \\
 x_{0j} + x_{1j} + x_{2j} &= 15 & (j = 0..2) \\
 x_{00} + x_{11} + x_{22} &= 15 \\
 x_{02} + x_{11} + x_{20} &= 15
 \end{aligned}$$

ここで Alldifferent は与えられた引数が互いに異なることを表す。すなわち $\text{Alldifferent}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は $x_i \neq x_j$ (for all $i < j$) と同様である。

CSP を記述したファイルは以下のようになる ([MagicSquare3-csp.scala](#))。

```
| 1: import jp.kobe_u.coprism._
| 2: import jp.kobe_u.coprism.dsl._
| 3:
| 4: init
| 5: int('x(0,0), 1, 9); int('x(0,1), 1, 9); int('x(0,2), 1, 9)
| 6: int('x(1,0), 1, 9); int('x(1,1), 1, 9); int('x(1,2), 1, 9)
| 7: int('x(2,0), 1, 9); int('x(2,1), 1, 9); int('x(2,2), 1, 9)
| 8: add(Alldifferent(
| 9:   'x(0,0), 'x(0,1), 'x(0,2),
|10:   'x(1,0), 'x(1,1), 'x(1,2),
|11:   'x(2,0), 'x(2,1), 'x(2,2)
|12: ))
|13: add('x(0,0) + 'x(0,1) + 'x(0,2) === 15)
|14: add('x(1,0) + 'x(1,1) + 'x(1,2) === 15)
|15: add('x(2,0) + 'x(2,1) + 'x(2,2) === 15)
|16: add('x(0,0) + 'x(1,0) + 'x(2,0) === 15)
|17: add('x(0,1) + 'x(1,1) + 'x(2,1) === 15)
|18: add('x(0,2) + 'x(1,2) + 'x(2,2) === 15)
|19: add('x(0,0) + 'x(1,1) + 'x(2,2) === 15)
|20: add('x(0,2) + 'x(1,1) + 'x(2,0) === 15)
```

4.3.1 練習問題

- 3×3 の魔方陣の解はいくつあるか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い。

```
|      scala> solutions.size
```

2. 回転、鏡像で対称な解を除くには、どのような制約条件を追加すれば良いか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い。

```
|      scala> cancel
|      scala> add('x(0,0) < 'x(0,2))
|      scala> add('x(0,0) < 'x(2,0))
|      scala> add('x(0,0) < 'x(2,2))
|      scala> add('x(0,2) < 'x(2,0))
|      scala> solutions.foreach(println)
```

3. $n \times n$ の魔方陣の CSP を Copris で記述せよ。

- (解答例)

[MagicSquare-csp.scala](#) 参照。

4.4 グラフ彩色問題

以下のグラフの各頂点に 1 から 3 の数を割り当て、隣接する頂点の異なるようにせよ。

このような問題は **グラフ彩色問題** (GCP; Graph Coloring Problem) と呼ばれる ([Wikipedia:グラフ彩色](#))。

上記のグラフは $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, v_4 = 1$ と彩色すれば良い。また 2 色では彩色できない。

これは、以下の CSP (制約充足問題) として定式化できる。

$$\begin{aligned} v_1 &\in \{1, 2, 3\} \\ v_2 &\in \{1, 2, 3\} \\ v_3 &\in \{1, 2, 3\} \\ v_4 &\in \{1, 2, 3\} \\ v_1 &\neq v_2 \\ v_1 &\neq v_3 \\ v_2 &\neq v_3 \\ v_2 &\neq v_4 \\ v_3 &\neq v_4 \end{aligned}$$

CSP を記述したファイルは以下のようになる ([GCP-csp.scala](#))。

```
| 1: import jp.kobe_u.coprism._
| 2: import jp.kobe_u.coprism.dsl._
| 3:
| 4: def define(edges: Set[(Int,Int)], colors: Int) {
| 5:   init
| 6:   val nodes = for ((i,j) <- edges; k <- Seq(i,j)) yield k
| 7:   for (i <- nodes)
| 8:     int('v(i), 1, colors)
| 9:   for ((i,j) <- edges)
|10:     add('v(i) != 'v(j))
```

```

| 11: }
| 12:
| 13: val graph1 = Set((1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4))
|
|   scala> :load GCP-csp.scala
|   scala> define(graph1, 3)
|   scala> find

```

4.4.1 練習問題

1. 隣接する頂点の色が単に異なるだけでなく、値が2以上離れているようにするには、どのように CSP を記述すれば良いか? (ヒント: Copris では x の絶対値は $\text{Abs}(x)$ と記述する)

4.5 数独

次は、数独の問題を解いてみよう ([Wikipedia:数独](#)).

CSP を記述したファイルは以下のようなになる ([Sudoku-csp.scala](#)).

```

| 1: import jp.kobe_u.copris._
| 2: import jp.kobe_u.copris.dsl._
| 3:
| 4: def define(board: Seq[Seq[Int]]) {
| 5:   val n = 9; val m = 3
| 6:   init
| 7:   for (i <- 0 until n; j <- 0 until n)
| 8:     int('x(i,j), 1, n)
| 9:   for (i <- 0 until n)
|10:     add(Alldifferent((0 until n).map(j => 'x(i,j))))
|11:   for (j <- 0 until n)
|12:     add(Alldifferent((0 until n).map(i => 'x(i,j))))
|13:   for (i <- 0 until n by m; j <- 0 until n by m) {
|14:     val xs = for (di <- 0 until m; dj <- 0 until m)
|15:       yield 'x(i+di,j+dj)
|16:     add(Alldifferent(xs))
|17:   }
|18:   for (i <- 0 until n; j <- 0 until n)
|19:     if (board(i)(j) > 0)
|20:       add('x(i,j) === board(i)(j))
|21: }
|22:
|23: val sudoku_fujiwara = Seq(
|24:   Seq(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
|25:   Seq(0, 4, 3, 0, 0, 0, 6, 7, 0),
|26:   Seq(5, 0, 0, 4, 0, 2, 0, 0, 8),
|27:   Seq(8, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 1),
|28:   Seq(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 5),
|29:   Seq(0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0),
|30:   Seq(0, 0, 6, 0, 0, 0, 7, 0, 0),
|31:   Seq(0, 0, 0, 5, 0, 1, 0, 0, 0),
|32:   Seq(0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)
|33: )
|
|   scala> :load Sudoku-csp.scala
|   scala> define(sudoku_fujiwara)
|   scala> find

```

4.5.1 練習問題

1. <http://puzzle.gr.jp> の問題を解いてみよう.

4.6 ビンパッキング問題

4人で8個の荷物を運ぶとする。各荷物の重さは3.3kg, 6.1kg, 5.8kg, 4.1kg, 5.0kg, 2.1kg, 6.0kg, 6.4kgである(合計は38.8kg)。各自の運ぶ荷物の重さの合計が11kg以下になるように荷物を割り当てることはできるか?

このような問題は **ビンパッキング問題** と呼ばれる ([Wikipedia:ビンパッキング問題](#))。

CSP として定式化するために、各人を行に対応させ、各荷物を列に対応させた行列を考える。行列の各成分は0か1である。このような行列は **結合行列** (incidence matrix) と呼ばれる。

結合行列の各行、各列に対する制約条件を考え、それを記述する。なお Copris では実数は利用できないため、たとえば100g単位で制約条件を記述する必要がある。

4.6.1 練習問題

1. 各列に対する制約条件は何か?
2. 各行に対する制約条件は何か?
3. Copris の CSP として記述せよ。

- (解答例)

[BinPacking-csp.scala](#) を参照。

4. 10kg 以下の場合はどうなるか?

- (解答例)

以下のようにして求めれば良い。

```
scala> :load BinPacking-csp.scala
scala> ex1(max = 100)
```

4.7 ナップサック問題

5つの品物の価格と価値が以下の表に示されるようになっているとする。価格の合計が15以下で、価値の合計が19以上になる場合はあるか?

品物	価格	価値
品物 0	3	4
品物 1	4	5
品物 2	5	6
品物 3	7	8
品物 4	9	10

Copris で記述した CSP は以下ようになる ([Knapsack-csp.scala](#))。

```
1: import jp.kobe_u.copris._
2: import jp.kobe_u.copris.dsl._
3:
4: def define(maxCost: Int, minValue: Int, costs: Seq[Int], values: Seq[Int]) {
5:   init
6:   val n = costs.size
7:   for (i <- 0 until n)
8:     boolInt('x(i))
9:   val c = for (i <- 0 until n) yield 'x(i) * costs(i)
10:  add(Add(c) <= maxCost)
11:  val v = for (i <- 0 until n) yield 'x(i) * values(i)
12:  add(Add(v) >= minValue)
```

```

13: }
14:
15: def ex1(maxCost: Int = 15, minValue: Int = 19) {
16:   val costs = Seq(3, 4, 5, 7, 9)
17:   val values = Seq(4, 5, 6, 8, 10)
18:   define(maxCost, minValue, costs, values)
19:   if (find) {
20:     val items = (0 until costs.size).filter(i => solution('x(i)) == 1)
21:     println(items)
22:   }
23: }

```

価格の合計の上限のみが与えられ、価値の合計が最大になる場合を探す問題はナップサック問題 (Knapsack problem) と呼ばれる ([Wikipedia:ナップサック問題](#))。

このような問題では、制約を満たす解のうち、指定された変数の値が最大 (あるいは最小) になるものを見つける必要がある。これらは 制約最適化問題 (COP; Constraint Optimization Problem) と呼ばれる。

Copris で COP を解く場合には、maximize (あるいは minimize) メソッドを用い、引数に最小化 (あるいは最大化) したい変数を指定する。最適解は findOpt メソッドで求められる。

上記の問題の場合、以下のようにプログラムを修正する。

```

| val v = for (i <- 0 until n) yield 'x(i) * values(i)
| int('value, 0, values.sum)
| add('value == Add(v))
| maximize('value)

```

4.7.1 練習問題

1. 上記で価値の合計が最大になる品物の組合せを求めよ。

- (解答例)

[KnapsackOpt-csp.scala](#) を参照。

```

| scala> :load KnapsackOpt-csp.scala
| scala> ex1()

```

4.8 4 クイーン問題

4×4 のボード上に、4つのチェスのクイーンのコマを置く。4つのクイーンが互いに取られないように配置することはできるか?

一般に $n \times n$ ボード上で n 個のクイーンを配置する場合、**n-クイーン問題** (n-Queens problem) と呼ばれる ([Wikipedia:エイト・クイーン](#))。

i 行 j 列にクイーンを配置することを表す 0-1 変数 x_{ij} を用いると、この 4-クイーン問題は以下のように定式化で

きる。

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &\in \{0, 1\} & (i = 0..3, j = 0..3) \\
 x_{i0} + x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} &= 1 & (i = 0..3) \\
 x_{0j} + x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} &= 1 & (j = 0..3) \\
 x_{01} + x_{10} &\leq 1 \\
 x_{02} + x_{11} + x_{20} &\leq 1 \\
 x_{03} + x_{12} + x_{21} + x_{30} &\leq 1 \\
 x_{13} + x_{22} + x_{31} &\leq 1 \\
 x_{23} + x_{32} &\leq 1 \\
 x_{02} + x_{13} &\leq 1 \\
 x_{01} + x_{12} + x_{23} &\leq 1 \\
 x_{00} + x_{11} + x_{22} + x_{33} &\leq 1 \\
 x_{10} + x_{21} + x_{32} &\leq 1 \\
 x_{20} + x_{31} &\leq 1
 \end{aligned}$$

0-1 変数の和に関する制約は **ブール基数制約** (Boolean cardinality constraint) と呼ばれる。Coprism ではブール基数制約の SAT 符号化を自動的に行うが、ここでは、プログラム内で SAT 符号化を実装する。ブール基数制約の SAT 符号化には様々な方法があるが、ここで実装する方法は最も単純なペア・ワイズ法である。

Coprism で記述した CSP は以下ようになる ([QueensBC-csp.scala](#))。

```

1: import jp.kobe_u.coprism._
2: import jp.kobe_u.coprism.dsl._
3:
4: def addAtLeastOne(xs: Seq[Term]) {
5:   add(Or(xs.map(x => x.?))
6: }
7: def addAtMostOne(xs: Seq[Term]) {
8:   for (Seq(x1,x2) <- xs.combinations(2))
9:     add(!(x1.? && x2.?))
10: }
11: def addExactOne(xs: Seq[Term]) {
12:   addAtLeastOne(xs)
13:   addAtMostOne(xs)
14: }
15:
16: def define(n: Int) {
17:   init
18:   for (i <- 0 until n; j <- 0 until n)
19:     boolInt('x(i,j))
20:   for (i <- 0 until n) {
21:     val xs = for (j <- 0 until n) yield 'x(i,j)
22:     addExactOne(xs)
23:   }
24:   for (j <- 0 until n) {
25:     val xs = for (i <- 0 until n) yield 'x(i,j)
26:     addExactOne(xs)
27:   }
28:   for (s <- 1 to 2*n-3) {
29:     val xs = for (i <- 0 until n; j <- 0 until n; if s == i+j) yield 'x(i,j)
30:     addAtMostOne(xs)
31:   }
32:   for (s <- 2-n to n-2) {
33:     val xs = for (i <- 0 until n; j <- 0 until n; if s == i-j) yield 'x(i,j)
34:     addAtMostOne(xs)
35:   }
36: }

```

ここで `x.?` は `Ge(x,1)` と同じである。

```
| scala> :load QueensBC-csp.scala
| scala> val n = 4
| scala> define(n)
| scala> find
| scala> for (i <- 0 until n) println((0 until n).map(j => solution('x(i,j))).mkString(" "))
```

以下のような暗黙変換を加えたくなくなるかも知れない。

```
| implicit def term2constraint(x: Term) = x.?
| implicit def symbol2constraint(s: Symbol) = Var(s.name).?
```

この場合、`'?` メソッドを使用せずに以下のように制約を記述できる。

```
| boolInt('x)
| boolInt('y)
| add('x + 'y <= 1)
| add('x || 'y)
```

しかし、これらの暗黙変換により予想していない変換が行われる可能性がある。利用には注意が必要である。

5 クラスとメソッドの簡単なまとめ

ここでは Copris が提供するクラスとメソッドを簡単にまとめる。

5.1 整数変数オブジェクト (Var オブジェクト)

整数変数オブジェクトは `Var` で生成する。引数にはその名前を与える。

```
| scala> val x = Var("x")
| x: jp.kobe_u.copris.Var = x
```

名前がない場合は、新しい匿名変数オブジェクトが生成される。

```
| scala> var z = Var()
| z: jp.kobe_u.copris.Var = _I1
```

`Var` オブジェクトに添字を与えることで、新しい `Var` オブジェクトを生成できる。添字には整数や文字列を使用でき、また複数与えても良い。ただし、添字に Copris の整数変数を用いることはできない。

```
| scala> x(1)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = x(1)
| scala> x("a")
| res: jp.kobe_u.copris.Var = x(a)
| scala> x(1, "a")
| res: jp.kobe_u.copris.Var = x(1,a)
```

Scala の `Symbol` は、`Var` オブジェクトに暗黙変換される。

```
| scala> 'x(1)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = x(1)
```

以下のように日本語を用いても良い。

```
| scala> '個数(1)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = 個数(1)
```

`Var` オブジェクトは後述の項 (`Term`) オブジェクトの一種である。

5.2 項オブジェクト (Term オブジェクト)

整数変数オブジェクトの他の項オブジェクトには以下のものがある。

- Num(*Int*)

Num オブジェクトは数を表す。

```
scala> Num(314)
res: jp.kobe_u.copris.Num = 314
```

- Abs(*T*)

Abs オブジェクトは絶対値を表す。

```
scala> Abs('x)
res: jp.kobe_u.copris.Abs = Abs(x)
```

- Neg(*T*)

Neg オブジェクトは単項マイナスを表す。- 演算子も利用できる。

```
scala> - 'x
res: jp.kobe_u.copris.Neg = Neg(x)
```

- Add(*T1*, ..., *Tn*), Add(Seq(*T1*, ..., *Tn*))

Add オブジェクトは加算を表す。+ 演算子も利用できる。

```
scala> 'x + 'y
res: jp.kobe_u.copris.Add = Add(x,y)
```

- Sub(*T1*, ..., *Tn*), Sub(Seq(*T1*, ..., *Tn*))

Sub オブジェクトは減算を表す。- 演算子も利用できる。

```
scala> 'x - 'y
res: jp.kobe_u.copris.Sub = Sub(x,y)
```

- Mul(*T1*, ..., *Tn*), Mul(Seq(*T1*, ..., *Tn*))

Mul オブジェクトは乗算を表す。乗数は整数でなければならない。* 演算子も利用できる。

```
scala> 'x * 2
res: jp.kobe_u.copris.Mul = Mul(x,2)
```

- Div(*T1*, *T2*), Mod(*T1*, *T2*)

Div, Mod オブジェクトは除算, 剰余を表す。除数は整数でなければならない。/, % 演算子も利用できる。

```
scala> 'x / 3
res: jp.kobe_u.copris.Div = Div(x,3)
```

- Max(*T1*, ..., *Tn*), Max(Seq(*T1*, ..., *Tn*)), Min(*T1*, ..., *Tn*), Min(Seq(*T1*, ..., *Tn*))

Max, Min オブジェクトは最大値, 最小値を表す。

```
scala> Max('x+1, 'y+2)
res: jp.kobe_u.copris.Max = Max(Add(x,1),Add(y,2))
```

- If(*C*, *T1*, *T2*)

If オブジェクトは if 式を表す。C が真の時 *T1*, 偽の時 *T2* の値を取る。

```
scala> If('x > 0, Num(1), Num(0))
res: jp.kobe_u.copris.If = If(Gt(x,0),1,0)
```

5.3 制約オブジェクト (Constraint オブジェクト)

- Eq(*T1*, *T2*), Ne(*T1*, *T2*), Le(*T1*, *T2*), Lt(*T1*, *T2*), Ge(*T1*, *T2*), Gt(*T1*, *T2*)

Eq, Ne, Le, Lt, Ge, Gt オブジェクトは比較を表す。===, !=, <=, <, >=, > の演算子も利用できる。

```
scala> 'x === 'y
res: jp.kobe_u.copris.Eq = Eq(x,y)
```

x.? および x.! は、それぞれ $x \geq 1$ および $x \leq 0$ と同一である。

```
scala> 'x.?
res: jp.kobe_u.copris.Eq = Ge(x,1)
scala> 'x.!
res: jp.kobe_u.copris.Le = Le(x,0)
```

- Alldifferent(*T1*, ..., *Tn*), Alldifferent(Seq(*T1*, ..., *Tn*))

Alldifferent オブジェクトは T_1 から T_n が互いに異なることを表す。

- Not(C)
Not オブジェクトは否定を表す。演算子 ! も利用できる。
- And(C_1, \dots, C_n), And(Seq(C_1, \dots, C_n))
And オブジェクトは連言 (論理積) を表す。演算子 && も利用できる。
- Or(C_1, \dots, C_n), Or(Seq(C_1, \dots, C_n))
Or オブジェクトは選言 (論理和) を表す。演算子 || も利用できる。
- Imp(C_1, C_2), Iff(C_1, C_2)
Imp, Iff オブジェクトは含意, 同値を表す。演算子 ==>, <==> も利用できる。
- Xor(C_1, C_2)
Xor オブジェクトは排他的論理和を表す。演算子 ^ も利用できる。

5.4 CSP オブジェクト

CSP オブジェクトは、制約充足問題を表すオブジェクトである。jp.kobe_u.copris.dsl._ を import した場合、デフォルトの CSP オブジェクトを変数 csp として参照できる。

5.4.1 整数変数の宣言

整数変数は int メソッドで宣言する。通常は、下限値と上限値を与える。

```
| scala> int('x, 1, 10)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = x
```

下限値と上限値が一致する場合は、1 引数で良い。

```
| scala> int('y, 5)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = y
```

ドメインが連続値でない場合は、集合を与える。集合の要素の順序は任意で良い。

```
| scala> int('p(1), Set(2,3,5,7))
| res: jp.kobe_u.copris.Var = p(1)
| scala> int('p(2), Set(3,7,5,2))
| res: jp.kobe_u.copris.Var = p(2)
```

0-1 変数は boolInt で宣言する。boolInt(x) は int(x , 0, 1) と同一である。

```
| scala> boolInt('b)
| res: jp.kobe_u.copris.Var = b
```

変数のドメインは、csp.dom メソッドで確認できる。

```
| scala> csp.dom('x)
| res: jp.kobe_u.copris.Domain = Domain(1,10)
| scala> csp.dom('p(1))
| res: jp.kobe_u.copris.Domain = Domain(TreeSet(2, 3, 5, 7))
```

5.4.2 制約の追加

制約の追加は add で行う。

```
| scala> add('x === 'y * 2)
| scala> add('x === 'p(1) + 'p(2))
| scala> add('b.? <==> ('p(1) < 'p(2)))
```

現時点での変数宣言と制約は show で確認できる。

```
| scala> show
| int(x,1,10)
| int(y,5,5)
| int(p(1),Domain(TreeSet(2, 3, 5, 7)))
| int(p(2),Domain(TreeSet(2, 3, 5, 7)))
| int(b,0,1)
| Eq(x,Mul(y,2))
| Eq(x,Add(p(1),p(2)))
| Iff(Ge(b,1),Lt(p(1),p(2)))
```

Sugar の CSP ファイルは、dump コマンドで作成できる。

```
| scala> dump("output.csp")
```

DIMACS 形式の CNF ファイルを作成する場合は、dump コマンドに “cnf” オプションを指定する。

```
| scala> dump("output.cnf", "cnf")
```

5.5 解の探索

最初の解の探索は find で行う。

```
| scala> find
| res: Boolean = true
```

結果が true なら解が存在し、false なら存在しない。見つかった解は solution で表示される。

```
| scala> solution
| res: jp.kobe_u.copris.Solution = Solution(Map(b -> 0, p(2) -> 5, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 5),Map())
```

変数を solution への引数として与えれば、値が得られる。

```
| scala> solution('x)
| res: Int = 10
| scala> solution('x, 'p(1), 'p(2))
| res: Seq[Int] = ArrayBuffer(10, 5, 5)
```

find メソッド中では、以下が実行されている。

- CSP オブジェクトを SAT 符号化し、CNF ファイルを作成
- 作成された CNF に対し、SAT ソルバーによる解探索を実行 (デフォルトでは Sat4j が用いられる)
- SAT ソルバーの発見した解を CSP の解に逆符号化 (復号化)

なお、Copris が生成する CNF ファイル名は info コマンドで調べることができる。このファイルは Scala の実行終了時に自動的に消去される。

```
| scala> info
| res: Map[String,String] = Map(satFile -> /tmp/sugar3235357395765834639.cnf)
```

次の解は findNext で求める。

```
| scala> findNext
| res: Boolean = true
| scala> solution
| res: jp.kobe_u.copris.Solution = Solution(Map(b -> 0, p(2) -> 3, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 7),Map())
```

findNext メソッド中では、以下が実行されている。

- 現在の解の否定を表す条件を CNF ファイルに追加
- 追加した CNF に対し、SAT ソルバーによる解探索を実行
- SAT ソルバーの発見した解を CSP の解に逆符号化 (復号化)

全解を求めるには solutions を用いる.

```
| scala> cancel
| scala> solutions.foreach(println)
| Solution(Map(b -> 0, p(2) -> 5, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 5),Map())
| Solution(Map(b -> 0, p(2) -> 3, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 7),Map())
| Solution(Map(b -> 1, p(2) -> 7, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 3),Map())
```

ある変数を最大化, 最小化するには maximize, minimize で変数を指定し, findOpt で最適解を求める.

```
| scala> cancel
| scala> maximize('p(2))
| scala> findOpt
| res: Boolean = true
| scala> solution
| res: jp.kobe_u.copris.Solution = Solution(Map(b -> 1, p(2) -> 7, y -> 5, x -> 10, p(1) -> 3),Map())
```

5.6 その他

5.6.1 SAT ソルバーの切り換え

SAT ソルバーは use で切り換える.

```
| scala> use(new sugar.Solver(csp, new sugar.SatSolver2("/usr/local/bin/minisat")))
| scala> use(new sugar.Solver(csp, new sugar.SatSolver1("/usr/local/bin/clasp")))
```

2 引数を取る SAT ソルバー (結果が別ファイル) には SatSolver2 を使い, 1 引数を取る SAT ソルバー (結果が標準出力) には SatSolver1 を用いる.

5.6.2 PB ソルバーの利用

PB (Pseudo-Boolean) ソルバーを利用するには, 以下のようにする.

```
| scala> use(new pb.Solver(csp, new pb.PbSolver("/usr/local/bin/clasp"), "binary"))
```

5.6.3 SMT ソルバーの利用

SMT ソルバー (Z3 など QF_LIA 理論が利用可能なもの) を使用したい場合, use コマンドで切り換える.

```
| scala> use(new smt.Solver(csp, new smt.SmtSolver("/usr/local/bin/z3")))
```

SMT ファイルは dump コマンドで保存できる.

```
| scala> dump("file.smt2")
```

5.6.4 JSR-331 ソルバーの利用

JSR-331 ソルバー も利用できる.

```
| scala> use(new jsr331.Solver(csp))
```

利用するには, JSR-331 を実装した jar ファイルを classpath に指定する必要がある.

```
| $ scala -cp ../build/copris-all_2.12_2.3.2.jar:../lib/"*
```

JSR-331 ソルバーの実装は <http://openrules.com/jsr331/downloads.htm> からダウンロードできる.

5.6.5 XCSP ファイルのインポート

CSP ソルバー競技会で利用された XCSP 形式のファイルをインポートするには, 以下のようにする.

```
| scala> init  
| scala> (new loader.XCSPLoader(csp)).load("file.xml")
```

5.6.6 Sugar CSP ファイルのエクスポート・インポート

定義した CSP は [Sugar](#) の形式で、エクスポート・インポートができる。

```
| scala> dump("file.csp")  
| scala> init  
| scala> (new loader.SugarLoader(csp)).load("file.csp")
```

5.6.7 複数の CSP+Solver の利用

以下のようにして、複数の CSP+Solver を同時に利用できる。copris1 と copris2 の CSP と Solver は完全に独立している。

```
| 1: import jp.kobe_u.copris._  
| 2: import jp.kobe_u.copris.dsl._  
| 3:  
| 4: val copris1 = new sugar.Sugar()  
| 5: val copris2 = new sugar.Sugar()  
| 6: using(copris1) {  
| 7:   int('x, 1, 4)  
| 8:   add('x < 3)  
| 9: }  
| 10: using(copris2) {  
| 11:   int('x, 1, 4)  
| 12:   add('x >= 3)  
| 13: }  
| 14: copris1.solutions.foreach(println)  
| 15: copris2.solutions.foreach(println)
```

5.6.8 Copris DSL を用いない

Copris DSL のメソッドを import しなくなければ (つまり `import jp.kobe_u.copris.dsl._` をしなくなれば), 以下のように記述する ([ExampleNoDSL-csp.scala](#)).

```
| 1: import jp.kobe_u.copris._  
| 2:  
| 3: val copris = new sugar.Sugar()  
| 4: val x = copris.int(Var("x"), 1, 15)  
| 5: val y = copris.int(Var("y"), 1, 15)  
| 6: val z = copris.int(Var("z"), 1, 15)  
| 7: copris.add(x + y + z === 15)  
| 8: copris.add(x + y * 5 + z * 10 === 90)  
| 9:  
| 10: if (copris.find) {  
| 11:   println(copris.solution)  
| 12: }
```